Διάλεξη 19η

19/12/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω $f: J \to \dots$

Υπεν. Συναλογισμόν

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{r^n}{n!}\sup_{x\in J}|f^{(n)}(x)|\right]=0$$

$$\rightsquigarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ , \ x\in J\cap[x_0-r, x_0+r]$$

$\cos x \ , \ x_0=0 \ , \ r>0$

$f(x)=\cos x$

$f'(x)=-\sin x$

$f''(x)=-\cos x$

$f'''(x)=\sin x$

$f^{4}(x)=\cos x$

$f(0)=1$

$f'(0)=0$

$f''(0)=-1$

$f'''(0)=0$

$f^{4}(0)=1$

$\vdots$

$f^{(2n+1)}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{r^n}{n!}\sup_{x\in J}|(\cos x)^n|\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0$$

$f^{2n}(0)=(-1)^n$,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \ , \ x\in\mathbb{R}$$

Γεωμ. πρόοδος: $x^n \ , \ |x|<1$

$$1+x+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x} \ , \ |x|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

Π.χ. $\dfrac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$, $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ γνω. από λύκειο σχολείο ....

$$\frac{1}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n \ , \ |3x|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+4}=\frac{1}{(x-4)(x-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{(x-1)}\right)=\dots$$

ανάπτ. το γινόμενο σε συναλογισμό

▶ Έστω $a_2(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=0$,

$x_0\in I$, $x\in I$

Η σχέση αυτή θα ισχύει αν x_0: ομαλό σημείο.

x_0: ομαλό σημείο όταν
- → $a_2(x_0)\neq 0$
- → $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$: αναλυτική συνάρτηση του x_0.

Θεώρημα: Ας είναι $x_0\in I$ ομαλό σημείο της (E_0^2) και

$$\frac{a_1}{a_2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n$$, με ακτίνα σύγκλισης $R_1>0$

$$\frac{a_0}{a_1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n$$, με ακτίνα σύγκλισης $R_2>0$

Αν c_0, c_1 είναι 2 δεδομένες σταθερές τότε υπάρχει προσδιο. σταθεροί c_n ($n=2,3,4,\dots$) έτσι ώστε η $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ να είναι λύση της (E_0^2) στο διάστημα $I\cap(x_0-r,x_0+r)$ (όπου $r=\min\{R_1,R_2\}$) με $y(x_0)=c_0$, $y'(x_0)=c_1$

Πχ 2, σελ 243:

$y''-2(x-1)y'+2y=0$ || $x_0=1$, $R=+\infty$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n.$$

Λύση

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot n(x-1)^{n-1}$$

αν κάνω την σύμβαση που λέμε στο προηγ. παράδειγμα

$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\dots$ ή $y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot n(n-1)(x-1)^{n-2}$.

$$0=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n(n-1)(x-1)^{n-2}-2(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n\,(x-1)^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$$

Πριν να τα προσθέσω θα "ταυτοποιήσω" τους εκθέτες για να είναι ίδιοι

$$\Rightarrow 0=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n-1)(x-1)^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n\cdot n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot c_n(x-1)^n$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n\cdot n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(x-1)^n$$

$$=c_0\cdot 0\,\cancel{(-1)}^{0}+c_1\cdot\cancel{(1)}\cdot 0+\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)(x-1)^n-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} 2n\cdot c_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(x-1)^n$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_{n+2}(n+2)(n+1)-2nc_n+2c_n\right](x-1)^n=0}$$

$$\boxed{c_{n+2}(n+2)(n+1)-2nc_n+2c_n=0,\ n\geq 0} : (A)$$

(*) οι αναδρομικοί αυτοί τύποι είναι σαν τις συναρτήσεις. Επομένως χρειάζονται το πεδίο ορισμού! Δεν το ξεχνάω!!!

για $n=0$: η (A) γίνεται:

$$\boxed{2c_2+2c_0=0}$$

Από την (A) επιμέλου προκύπτει:

$$\boxed{c_{n+2} = \frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad , \; n \geq 0} \; : (B)$$

Υποθέτουμε ότι τα c_0, c_1 είναι δεδομένα (είτε που τα έχω δώσει είτε όχι) (θεωρητικά)

Στην (B): για $\underline{n=0}$: $c_2 = -\frac{2}{2} c_0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -c_0}$

για $\underline{n=1}$: $\boxed{c_3 = 0}$

για $\underline{n=2}$: $\boxed{c_4 = \frac{1}{6} c_2}$

για $n=3$: $c_5 = c_{..} \Rightarrow \boxed{c_5 = 0}$

για $n=4$: $c_6 = \dots$

για $n=5$: $\boxed{c_7 = 0}$

⋮

υ.ο.ο.

Παρατηρώ ότι οι $\underbrace{\text{"περιττοί"}}_{(c_3, c_5, c_7 ..)}$ βγαίνουν μηδέν

προχειρο σκέψη (δεν τα γράφω στην λύση. αυτά απλώς με καθοδηγούν)

Επιστρέφω στην λύση γράφοντας για τους άρτιους:

$$c_{2(k+1)} = \frac{2(2k-1)}{(2k+1)(2k+2)} \cdot c_{2k} \quad , k \geq 0$$

$k=0$: $c_2 = \frac{2(-1)}{1 \cdot 2} \cdot c_0$

$k=1$: $c_4 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} c_2$

⋮

$k = \nu - 1$: $c_{2\nu} = \frac{2(2\nu-3)}{(2\nu-1)2\nu}$

τα πολλ/ζω κατά μέλη και προκύπτει ⟹

$$c_{2\nu} = \frac{2^{\nu}(-1)(1)3\cdot 5\cdots(2\nu-3)}{[1\cdot 3\cdots(2\nu-1)][4\cdot 6\cdots(2\nu)]}\, c_0, \quad \underbrace{\nu \geq 1}$$

αυτό βγαίνει γιατί θέλω $\kappa \geq 0$ θέτω ως $\kappa = \nu - 1$ άρα θέλω $\nu - 1 \geq 0 \Rightarrow \nu \geq 1$

$\downarrow$

<u>π.χ.</u>: αν θέλω να υπολογίσω το c_{2018} τότε θέτω $\nu = \frac{2018}{2}$

και $c_{2\cdot\frac{2018}{2}} = c_{2018} = \dots$

– αυτά όσον αφορά τους συντελεστές άρτιας τάξης.

Για τους συντελεστές περιττής τάξης:

για $\underbrace{\nu = 2\kappa - 1 \geq 0}$: $c_{2\kappa-1+2} = \frac{2(2\kappa-1-1)}{(2\kappa-1+1)(2\kappa-1+2)}\, c_{2\kappa-1}, \ \kappa \geq \frac{1}{2}$

$2\kappa - 1 \geq 0$

$2\kappa \geq 1$

$\boxed{\kappa \geq 1/2}$

$\Downarrow$

$\kappa \geq 1$

$$\boxed{c_{2\kappa+1} = \frac{2(2\kappa-2)}{2\kappa(2\kappa+1)}\, c_{2\kappa-1}, \ \kappa \geq 1}$$

για $\kappa = 1$: $c_3 = \frac{2\cdot 0}{0\cdot 0}\, c_1 \Rightarrow c_3 = 0$

$\kappa = 2$ = $c_5 = \dots = 0$

$\vdots$

$\kappa = \nu$: $c_{2\nu+1} = \dots \underbrace{c_{2\nu-1}}_{0} = 0$

άρα $\boxed{c_{2\nu+1} = 0, \ \forall \nu \geq 0}$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(x-1)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n-1}(x-1)^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \dots c_0 (x-1)^{2n} + c_1 (x-1)^1 + 0$$

$$= c_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \dots (x-1)^{2n}}_{y_1(x) = \dots} + c_1(x-1), \; x \in \mathbb{R}$$

$$y_2(x) = (x-1)$$

<u>Παράδειγμα 1:</u> (Εξίσωση του Airy)

$$y'' - xy = 0 \quad , x_0 = 0$$

$$a_2 = 1 , \quad a_1 = 0 , \quad a_0 = -x .$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} .$$

Τώρα: $0 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} - \dots$

$$= \sum_{-3}^{\infty} (n+3)(n+2) c_{n+3} x^{n+1} - \sum_{0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 1 c_2 \cdot x^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) c_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+2) c_{n+3} - c_n \right] x^{n+1} = 0 \; , x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{για } c_2=0: \quad c_{n+3} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} c_n, \ n\geq 0}$$

για c_0, c_1 δεδ. <u>και</u> $c_2=0$

Οι κατηγορίες που θα έπαιρνα αρχικά είναι οι $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$.

Παρατηρώ ωστόσο ότι αφού $c_2=0$ τότε $c_{3\nu+2}=0, \nu\geq 0$

Άρα θα ασχοληθώ με τις άλλες 2 περιπτώσεις.

Για $n=3k+2, k\geq 0$: $c_{3k+2+3} =$

$3k+2\geq 0$

$3k\geq -2$

$$\underbrace{k\geq -2/3}_{k\geq 0}$$

Προκύπτει τελικά ότι:

$$c_{3n+2}=0, \quad c_{3n} = \frac{1}{3^n n!(2\cdot 5(3n-1))} c_0, \quad c_{3n+1} = \frac{1}{3^n n![4\cdot 7(3n+1)]} c$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+2} x^{3n+2}.$$

$$= \sum_{n=0} (\ldots) c_0 x^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty} (\ldots) x^{3n+1} c_1 + 0.$$

<u>Παράδειγμα 3:</u>

$$\underbrace{(1-x)}_{a_2} y'' \underbrace{- y'}_{a_1=-1} + \underbrace{xy}_{a_0=x} = 0, \quad y(0)=1, \ y'(0)=1$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2(x)=1-x \\ a_2(0)=1\neq 0 \end{array}\right\} \frac{a_1}{a_2} = \frac{-1}{1-x} = -\left(\frac{1}{1-x}\right) = -(1+x+x^2+\ldots), \ |x|<1$$

$R=1$

$$\frac{a_0}{a_2} = \frac{x}{1-x} = x(1+x+\dots) = x+x^2+\dots \quad , \underbrace{|x|<1=R_1}_{(-1,1)\ \text{π.ο}}$$

άρα η διαφορική μου θα είναι :

$$0=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow$$

$$0=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \Rightarrow$$

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n c_{n+1}x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^{n-1} \Rightarrow$$

$$0 = 2\cdot 1\, c_2 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)n c_{n+1}x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} -$$

$$- c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n-1} \Rightarrow$$

$$2c_2 - c_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)n c_{n+1} - n(n-1)c_n + n c_n + c_{n-2}\right]x^{n-1}$$

Με τις συνθήκες αυτές έχω ότι: $c_2=\frac{1}{2}c_1$,

$$c_{n+1} = \frac{n(n-1)-n}{(n+1)n}c_n - \frac{1}{n(n+1)}c_{n-2} \ , \ n\geq 2.$$

$c_0=1$ | για $n=2$: $c_3=-\frac{1}{6}$

$c_1=1$ | $n=3$: $c_4=\dots$

$c_2=1/2$

Στην άσκηση θα βρει ότι $c_n=\frac{1}{n!}$. //